L6 2.3 Some Limit Theorems 極限的唯一性 極限的四則運算

Thm: $\boxed{\text{(Uniqueness of a Limit)}}$

極限的唯一性，就是一個函數在某一點有極限。
Q:如果它存在，它可以有幾個極限？
A:一個，這個答案在概念上是對的，現在以數學來證明它。

If $\lim(x\to c)f(x)=L$ and $\lim(x\to c)f(x)=M$,then $L=M$.

假設它有兩個一個是 L 一個是 M，再去證這兩個相等，結果只有一個
從所求想起，但不知如何想起。
假設所求為錯。因為它很明顯對，所以假設它錯。直觀上很對的東西很難證，假設它錯，就可以很容易反駁它，叫反證法(在證無可證之下用)。

pf:assume L 不等於 ML 比較大或 M 比較大,say L>M.口語就說

Q:就說跟假設的差異在哪裡？
A:就說，並沒有真的假設，也就是隨便說說，不一定是事實，之後的證明不會有太大關係，只是容易說明而已。
Q:L 不等於 M，就說 L>M 很明顯就是錯，為什麼它不會對？
A:一個要逼到 L 一個要逼到 M，現在假設 L 不等於 M，L>M，這兩個一定有一個差距，既然如此可以有一個點可以跟 L 很靠近又跟 M 跟很靠近，做得到嗎？直觀上來講已經做不倒，因為我可以讓它很靠近 L 也可以很靠近 M，可是 L 跟 M 真的不一樣，它一定有一個距離，就可以得到矛盾。
Bay the way...現在的數學題目已經分兩類，一個是抽像一個是具體的例子，上次那個是具體的例子(證明極限)，數學系偏向抽象...。

Let $\varepsilon=(L-M)/2>0$

∵L 不等於 M，∴找不相交的區間，交集為空。
各取 L-M 一半則不相交，這東西一定是一個正數∵L>M，∴L-M>0。
可以找到一個點，同時落在 L 區間，也同時落在 M 區間，圖形上已經說這兩個區間不相交，現在講有點落在 L 區間，也落在 M 區間，存在有 δ1 及 δ2 滿足這兩個區間，得到交集為空，而得到矛盾。
為什麼可以做到？因為極限存在等於 L，如果極限不存在，則不對。
這個定理是假設極限存在，給 ε 可以得到 δ 滿足。

∵$\lim(x\to c)f(x)=L$ ∴$\exists\ \delta_1>0$ s.t. $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta_1$, $|f(x)-L|<(L-M)/2$.

∵$\lim(x\to c)f(x)=M$ ∴$\exists\ \delta_2>0$ s.t. $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta_2$, $|f(x)-M|<(L-M)/2$.

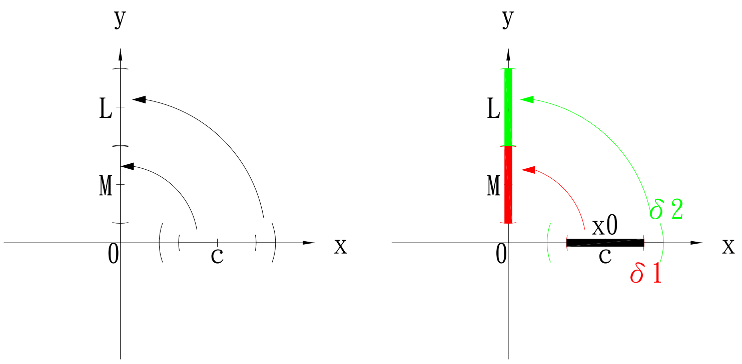
有點會同時送到 δ_1，也送到 δ_2

Choose $x_0\in\mathbb{R}$ s.t. $0<|x-c|<\min(\delta_1,\delta_2)$ 取一點落在交集裡頭

L6 2.3 Some Limit Theorems 極限的唯一性 極限的四則運算

Then $f(x_0) \in (L-(L-M)/2, L+(L-M)/2)=((L+M)/2,(3L-M)/2) \cap$

$(M-(L-M)/2, M+(L-M)/2)=((3M-L)/2,(L+M)/2)=\emptyset$.$(\rightarrow\leftarrow)$矛盾



Q:則已經證了，為什麼？在哪裡說已經證了？
A:因為這個點如果落在 $\min(\delta_1, \delta_2)$，一定落在 δ_1也落 δ_2，是延伸之前的想法。矛盾了，一個點落在空集合裡頭，事實上很多點都在空集合，但只要一個點就足夠了，也就是證明有誤。
Q:這個證明為什麼會錯誤？
A:因為一開始假設有誤，所以推得推導出矛盾。

Therefore L=M 假設錯誤，只剩下 L=M。

By the way 沒事多問問，多問問沒事。

Thm$\boxed{\text{(極限的四則運算)}}$

如果從極限的定義出發，去證明極限的存在，其實不容易。
需要解一個函數的集合和，函數可能是很難的，解集合是很複雜。
我們能不能繞一個彎解極限存在？數學家找到了，先在理論上去做運作，得到理論的基礎，再從理論上做計算的應用。用原來的方式太難做，怎麼辦呢？先把體材抽象化，得到一個理論的結果，幫助計算上的應用，就是極限的四則運算。
極限的四則運算是極限的突破，使得可以脫離 ε - δ 的語言。成熟的思想總結。

If $\lim_{(x\to c)}f(x)=L$ and $\lim_{(x\to c)}g(x)=M$.如果我有兩個在 c 點極限存在。

Q:給兩個函數 g、f，如何構造出新的函數？
A:透過兩個函數 f+g、f-g、f*g、f/g(g≠0)
細節 f、g 的定義域需要相同，如果不同需考慮定義域的交集。
因為任何一個函數都可以考慮任何一點的極限？極限可能存在可能不存在，極限不存在，可能有…八個圖例子。
如果兩函數極限存在，可以構造出四個函數，透過四則運算，則極限值等於多少？

Then ① $\lim[f(x)+g(x)]=L+M$

L6 2.3 Some Limit Theorems 極限的唯一性 極限的四則運算

② $\lim[\alpha f(x)]=\alpha L$, where 在此 $\alpha \in \mathbb{R}$。

③ $\lim[f(x)g(x)]=LM$

④ $\lim[f(x)/g(x)]=L/M$

口語：
①相加的極限會存在，且等於極限相加。
②乘常數的極限會存在，且等於極限乘常數。
③相乘的極限會存在，且等於極限相乘。
④若分母的極限不為 0。相除的極限會存在，且等於極限相乘。

pf.① Let $\varepsilon>0$ $|[f(x)+g(x)]-(L+M)|=|[f(x)-L]+[g(x)-M]|\leq|f(x)-L|+|g(x)-M|$

$\because \lim(x\to c)f(x)=L$,

$\therefore$For this $\varepsilon/2$, $\exists$ $\delta_1>0$, s.t. $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta_1$, $|f(x)-L|=\varepsilon/2$。

$\because \lim(x\to c)g(x)=M$,

$\therefore$For this $\varepsilon/2$, $\exists$ $\delta_2>0$, s.t. $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta_2$, $|g(x)-L|=\varepsilon/2$。

Take $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$,

$|[f(x)+g(x)]-(L+M)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

pf.② Let $\varepsilon>0$ $|\alpha f(x)-\alpha L|<|\alpha||f(x)-L|$解不下去了，回到條件來$\lim(x\to c)f(x)=L$。

透過解不等式$|f(x)-L|<\varepsilon$，而解$|f(x)-L|<\varepsilon/|\alpha|$，和在一起變$|\alpha||f(x)-L|<\varepsilon$。

$\because \lim(x\to c)f(x)=L$, $\therefore$For this $\varepsilon/|\alpha|$, $\exists$ $\delta_1>0$, s.t. $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta_1$,

$|f(x)-L|=\varepsilon/|\alpha|$。 因為$|f(x)-L|<\varepsilon$ 能解，所以$|\alpha||f(x)-L|<\varepsilon$ 能解。

Take $\delta=\varepsilon/|\alpha|$, then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$, $|\alpha f(x)-\alpha L|<|\alpha|\cdot\varepsilon/|\alpha|=\varepsilon$.

③④ Practice